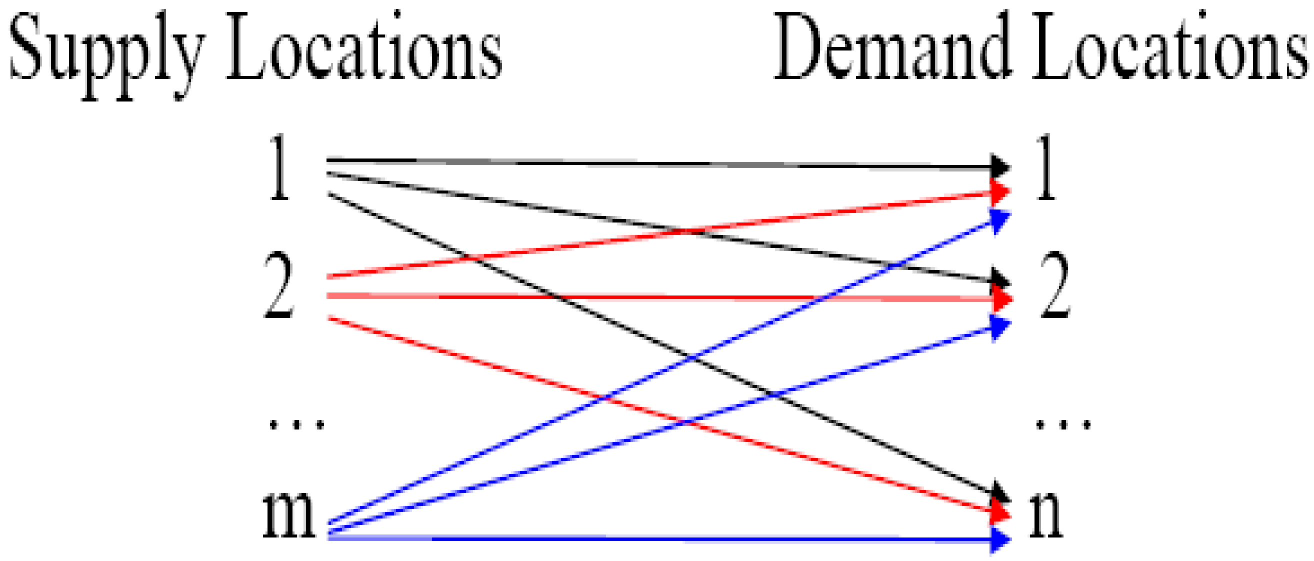
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΤΩΣΗΣ

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Περιγραφή

Το πρόβλημα μεταφοράς (transportation problem) ασχολείται με το πρόβλημα του προσδιορισμού του καλύτερου δυνατού τρόπου ικανοποίησης των απαιτήσεων *n* σημείων ζήτησης χρησιμοποιώντας τις δυναμικότητες *m* σημείων εφοδιασμού.

Προκειμένου να βρεθεί ο καλύτερος τρόπος, πρέπει να ληφθεί υπόψη το μεταβλητό κόστος μεταφοράς του προϊόντος από ένα σημείο εφοδιασμού σε ένα σημείο ζήτησης ή κάποιος παρόμοιος περιορισμός.



Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μοντέλο Μεταφοράς

- Οι επιχειρήσεις παράγουν προϊόντα σε τοποθεσίες που λέγονται ‘πηγές' και τα αποστέλλουν σε τοποθεσίες πελατών που λέγονται ‘προορισμοί’.

- Κάθε πηγή διαθέτει μία συγκεκριμένη ποσότητα προϊόντων που μπορεί να αποστείλει και κάθε προορισμός πρέπει να παραλάβει μία απαιτούμενη ποσότητα προϊόντων.

- Τα μόνα πιθανά φορτία είναι εκείνα που μεταφέρονται απευθείας από μία πηγή σε έναν προορισμό.

Τα προβλήματα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά ονομάζονται «προβλήματα μεταφοράς». Αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνουν την αποστολή ενός ομογενούς προϊόντος από ένα σύνολο σημείων παροχής σε ένα σύνολο σημείων ζήτησης.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ένα τυπικό πρόβλημα μεταφοράς απαιτεί τρία σύνολα δεδομένων:

- <u>Δυναμικότητες (ή παροχές)</u>
  Υποδηλώνουν τη μέγιστη ποσότητα που μπορεί να αποστείλει κάθε θέση παραγωγής σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα.

- <u>Ζητήσεις (ή απαιτήσεις)</u>
  Εκτιμώνται από κάποιο τύπο μοντέλου πρόβλεψης. Οι εκτιμήσεις των ζητήσεων βασίζονται συνήθως σε σχετικά ιστορικά δεδομένα.

- <u>Μοναδιαίο κόστος αποστολής</u>
  Προσδιορίζεται από οικονομοτεχνική ανάλυση του κόστους μεταφοράς.

- Το πρόβλημα μεταφοράς περιλαμβάνει τον καθορισμό της ποσότητας των αγαθών που θα μεταφερθούν από ένα σύνολο πηγών σε ένα σύνολο προορισμών.

- Ο συνηθέστερος αντικειμενικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς ή του συνόλου των αποστάσεων που πρέπει να διανυθούν.

- Τα προβλήματα μεταφοράς είναι μία ειδική περίπτωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού. Για την επίλυσή τους έχει αναπτυχθεί ένας ειδικός αλγόριθμος.

Βασική Ιδέα

- Στόχος: Η ελαχιστοποίηση του κόστους

- Μεταβλητές: Οι ποσότητες των προϊόντων που μεταφέρεται από κάθε σημείο παροχής σε κάθε σημείο ζήτησης.

- Περιορισμοί:
  - Μη αρνητικά φορτία
  - Διαθεσιμότητα φορτίων σε κάθε σημείο παροχής
  - Ανάγκη ζήτησης σε κάθε σημείο ζήτησης

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Βασικά Μεγέθη Προβλημάτων Μεταφοράς

Συμβολισμός	Μεταβλητή
m	Πηγές (θέσεις παραγωγής)
n	Προορισμοί (θέσεις κατανάλωσης)
a_i	Δυναμικότητα (ή ικανότητα παραγωγής) της πηγής i
b_j	Ανάγκες (ζήτηση ή κατανάλωση) του προορισμού j
c_{ij}	Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από την πηγή i στον προορισμό j
x_{ij}	Ποσότητα μονάδων που αποστέλλεται από την πηγή i στον προορισμό j
C	Συνολικό κόστος μεταφοράς

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Μαθηματικό Μοντέλο Προβλήματος Μεταφοράς

$$\min C = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{22} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

με τους περιορισμούς δυναμικότητας:

$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$

$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2$

....

$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$

τους περιορισμούς αναγκών:

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$

$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$

....

$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$

καθώς και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας $x_{ij} \geq 0, \forall\ i,j$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Το Πρότυπο Μοντέλο του Προβλήματος Μεταφοράς

$$\min \; C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

με τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

και $x_{ij} \geq 0$,

όπου i = 1, 2, ..., m και j = 1, 2, ..., n

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Το πρόβλημα αυτό έχει δυνατές λύσεις μόνο αν το σύνολο των δυναμικοτήτων των πηγών είναι ίσο προς το σύνολο των αναγκών των προορισμών, όταν δηλαδή:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Παραδοχές

- Το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς είναι ανεξάρτητο από τη μεταφερόμενη ποσότητα.
- Η παροχή και η ζήτηση του προϊόντος είναι γνωστές και ανεξάρτητες από την τιμή χρέωσής του.
- Η διαθέσιμη χωρητικότητα των μεταφορικών μέσων για αποστολή σε οποιαδήποτε διαδρομή είναι απεριόριστη.
- Μεταφέρεται ένα μόνο είδος εμπορεύματος.

Τυποποιημένη Μορφή Πίνακα Μεταφοράς

j \ i	(1)	(2)	…	(n)	a_i
(1)	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	… …	x_{1n} c_{1n}	a_1
(2)	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	… …	x_{2n} c_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	…
(m)	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	… …	x_{mn} c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2		b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Παράδειγμα

Μία μεταλλευτική εταιρεία εξορύσσει το βασικό προϊόν που εμπορεύεται από τρία λατομεία, έστω $Λ_1$, $Λ_2$ και $Λ_3$. Η εβδομαδιαία παραγωγή του κάθε λατομείου είναι 75, 150 και 75 τόνοι χαλικιού αντίστοιχα. Το προϊόν που εξορύσσεται πρέπει να μεταφερθεί σε πέντε κύριους καταναλωτές, έστω K_1, K_2, K_3, K_4 και K_5, οι οποίοι χρειάζονται για τις ανάγκες τους 100, 60, 40, 75 και 25 τόνους χαλικιού ανά εβδομάδα αντίστοιχα.

Το πρόβλημα που απασχολεί τη διοίκηση της εταιρείας είναι η ελαχιστοποίηση του απαιτούμενου κόστους για τη μεταφορά της ποσότητας του προϊόντος στους καταναλωτές. Για το σκοπό αυτό έγινε αναλυτική κοστολόγηση, η οποία έδωσε τα αποτελέσματα του ακόλουθου πίνακα (τα αριθμητικά δεδομένα συμβολίζουν το κόστος μεταφοράς σε € ανά τόνο χαλικιού).

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Πίνακας κόστους μεταφοράς χαλικιού

Καταναλωτές

Λατομεία

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
$Λ_1$	3	2	3	4	1
$Λ_2$	4	1	2	4	2
$Λ_3$	1	0	5	3	2

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μέθοδοι Εύρεσης Αρχικής Βασικής Δυνατής Λύσης

1. Μέθοδος βορειοδυτικής γωνίας (Northwest corner method)

2. Μέθοδος ελάχιστου κόστους (Minimum cost method)

3. Μέθοδος Vogel (Vogel method)

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Μέθοδος της Βορειοδυτικής Γωνίας

1. Εκχωρείται στο βορειοδυτικό (επάνω αριστερό) κελί η μέγιστη δυνατή ποσότητα ανάλογα με την προσφορά και τη ζήτηση της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης. Η προσφορά της γραμμής και η ζήτηση της στήλης προσαρμόζονται κατάλληλα.

2. Διαγράφεται είτε η γραμμή της οποίας η προσφορά έχει εξαντληθεί είτε η στήλη της οποίας η ζήτηση έχει ικανοποιηθεί.

3. Αν έχουν εξαντληθεί όλες οι προσφορές και έχουν ικανοποιηθεί όλες οι ζητήσεις τότε ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ, διαφορετικά μεταφορά στο βήμα 1.

Πιο αναλυτικά:

Ξεκινώντας από το κελί (1,1) δίνεται στη μεταβλητή x_{ij} η μέγιστη δυνατή τιμή, η οποία είτε ικανοποιεί τις ανάγκες του προορισμού j είτε εξαντλεί την υπόλοιπη δυναμικότητα της πηγής i, και συγκεκριμένα τη μικρότερη από τις δύο ποσότητες. Κατόπιν δίνεται τιμή στη μεταβλητή x_{ij+1} στην $1^{η}$ περίπτωση ή στη μεταβλητή x_{i+1j} στη $2^{η}$ περίπτωση. Προφανώς, λόγω της ισορροπίας των συνολικών δυναμικοτήτων και αναγκών του προβλήματος μεταφοράς, με την τιμή της τελευταίας μεταβλητής x_{mn} ικανοποιούνται ταυτόχρονα η δυναμικότητα της πηγής m και οι ανάγκες του προορισμού n.

Η μέθοδος της βορειοδυτικής γωνίας είναι απλή και γρήγορη στη χρήση της, ωστόσο δε χρησιμοποιεί καθόλου τις δαπάνες αποστολής. Μπορεί να δώσει εύκολα μια αρχική βασική δυνατή λύση, αλλά το αντίστοιχο συνολικό κόστος αποστολής μπορεί να είναι υψηλό.

Αρχική Δυνατή Λύση με τη Μέθοδο της Βορειοδυτικής Γωνίας

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
$Λ_1$	75 3	2	3	4	1	75
$Λ_2$	25 4	60 1	40 2	25 4	2	150
$Λ_3$	1	0	5	50 3	25 2	75
	100	60	40	75	25	

K_{min} = € 765

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μέθοδος Ελάχιστου Κόστους

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τα κόστη αποστολής, έτσι ώστε να καταλήξει σε μία αρχική δυνατή λύση που έχει χαμηλότερο κόστος.

Για να ξεκινήσει η μέθοδος εντοπίζεται αρχικά η μεταβλητή x_{ij} με το μικρότερο κόστος αποστολής. Κατανέμεται στη μεταβλητή x_{ij} η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που είναι το ελάχιστο από τα αντίστοιχα a_i και b_j.

Κατόπιν διαγράφεται η γραμμή i ή η στήλη j και ελαττώνεται η παροχή ή η ζήτηση της μη διαγραφείσας γραμμής ή στήλης κατά την ποσότητα x_{ij}. Το επόμενο κελί με το ελάχιστο κόστος αποστολής επιλέγεται ανάμεσα από αυτά που δε βρίσκονται στη διαγραφείσα γραμμή ή στήλη. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου εξαντληθούν όλες οι δυναμικότητες και ικανοποιηθούν όλες οι ζητήσεις.

Αρχική Βασική Δυνατή Λύση με τη Μέθοδο Ελάχιστου Κόστους

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
$Λ_1$	50 3	2	3	4	25 1	75
$Λ_2$	35 4	1	40 2	75 4	2	150
$Λ_3$	15 1	60 0	5	3	2	75
	100	60	40	75	25	

K_{min} = € 710

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μέθοδος Vogel

Βήματα μεθοδολογίας

1. Προσθήκη - κάτω και δεξιά του πίνακα μεταφοράς - μίας νέας γραμμής και μίας νέας στήλης με στοιχεία τη διαφορά των δύο μικρότερων στοιχείων κόστους κάθε γραμμής και κάθε στήλης αντίστοιχα.

2. Επιλογή του μεγαλύτερου στοιχείου των δύο νέων ευθειών που προστέθηκαν στον πίνακα μεταφοράς.

3. Εύρεση του μικρότερου στοιχείου της γραμμής i ή της στήλης j, στην οποία ανήκει το στοιχείο που προσδιορίσθηκε στο βήμα 2.

4. Κατανομή της τιμής $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$ στο δρομολόγιο που αντιστοιχεί στη θέση του μικρότερου στοιχείου, προκειμένου να ικανοποιηθεί η δυναμικότητα μίας πηγής ή η ζήτηση ενός προορισμού.

5. Αν εξαντλείται η δυναμικότητα μίας πηγής, τότε η ζήτηση b_j του αντίστοιχου προορισμού μειώνεται κατά την ποσότητα a_i. Αντίθετα, εάν ικανοποιείται η ζήτηση ενός προορισμού, τότε η δυναμικότητα a_i της αντίστοιχης πηγής μειώνεται κατά b_j. Η πηγή (γραμμή) ή ο προορισμός (στήλη) που ικανοποιήθηκε διαγράφεται και δε λαμβάνεται υπόψη στη συνέχεια.

Κάθε φορά που επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία εξαντλείται η δυναμικότητα μίας πηγής ή ικανοποιούνται οι ανάγκες ενός προορισμού. Η εφαρμογή της μεθόδου τερματίζεται όταν ικανοποιηθούν ταυτόχρονα η δυναμικότητα της τελευταίας γραμμής και οι ανάγκες της τελευταίας στήλης. Η λύση που προκύπτει με τον τρόπο αυτό είναι δυνατή, διότι ικανοποιεί όλες τις δυναμικότητες και όλες τις ανάγκες.

Επαναληπτικά Βήματα Μεθόδου Vogel

1^{ο} βήμα

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	Διαφορά
$Λ_1$	3	2	3	4	1	1
$Λ_2$	4	1	2	4	2	1
$Λ_3$	1	0	5	3	2	1
Διαφορά	2	1	1	1	1	

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5		
$Λ_1$							75
$Λ_2$							150
$Λ_3$	75					~~75~~	0
	~~100~~ 25	60	40	75	25		

2^{ο} βήμα

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	Διαφορά
$Λ_1$	3	2	3	4	1	1
$Λ_2$	4	1	2	4	2	1
$Λ_3$						
Διαφορά	1	1	1	0	1	

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5		
$Λ_1$					25	~~75~~	50
$Λ_2$							150
$Λ_3$	75						0
	25	60	40	75	~~25~~ 0		

3^{ο} βήμα

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	Διαφορά
$Λ_1$	3	2	3	4		1
$Λ_2$	4	1	2	4		1
$Λ_3$						
Διαφορά	1	1	1	0		

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5		
$Λ_1$	25				25	~~50~~	25
$Λ_2$							150
$Λ_3$	75						0
	~~25~~ 0	60	40	75	0		

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

4ο βήμα

	K$_1$	K$_2$	K$_3$	K$_4$	K$_5$	**Διαφορά**
Λ$_1$		2	3	4		1
Λ$_2$		1	2	4		1
Λ$_3$						
Διαφορά		1	1	0		

	K$_1$	K$_2$	K$_3$	K$_4$	K$_5$		
Λ$_1$	25	25			25	~~25~~	0
Λ$_2$							150
Λ$_3$	75						0
	0	~~60~~ 35	40	75	0		

5ο βήμα

	K$_1$	K$_2$	K$_3$	K$_4$	K$_5$	**Διαφορά**
Λ$_1$						
Λ$_2$		1	2	4		1
Λ$_3$						
Διαφορά		-	-	-		

	K$_1$	K$_2$	K$_3$	K$_4$	K$_5$		
Λ$_1$	25	25			25		25
Λ$_2$		35				~~150~~	115
Λ$_3$	75						0
	0	~~35~~ 0	40	75	0		

6ο βήμα

	K$_1$	K$_2$	K$_3$	K$_4$	K$_5$	**Διαφορά**
Λ$_1$						
Λ$_2$			2	4		1
Λ$_3$						
Διαφορά			-	-		

	K$_1$	K$_2$	K$_3$	K$_4$	K$_5$		
Λ$_1$	25	25			25		25
Λ$_2$		35	40			~~115~~	75
Λ$_3$	75						0
	0	0	~~40~~ 0	75	0		

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Αρχική Βασική Δυνατή Λύση (Μέθοδος Vogel)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
$Λ_1$	25 3	2	3	4	25 1	75
$Λ_2$	4	35 1	40 2	75 4	2	150
$Λ_3$	75 1	0	5	3	2	75
	100	60	40	75	25	

K_{min} = € 640

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εκφυλισμένη Αρχική Λύση

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
$Λ_1$	100 3	2	3	4	1	100
$Λ_2$	4	60 1	40 2	25 4	2	125
$Λ_3$	1	0	5	50 3	25 2	75
	100	60	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Αρχική Λύση που Δεν Είναι Πλέον Εκφυλισμένη

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
$Λ_1$	100 → 3	ε 2	3	4	1	100+ε
$Λ_2$	4	60 1	40 2	25 4	2	125
$Λ_3$	1	0	5	50 3	25 2	75
	100	60+ε	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Μεθοδολογία Επίλυσης Προβλημάτων Μεταφοράς

Αρχικό βήμα
Δημιουργία μίας αρχικής βασικής δυνατής λύσης χρησιμοποιώντας μία από τις μεθόδους προσδιορισμού αρχικής λύσης.
Μεταφορά στον κανόνα τερματισμού.

Επαναληπτικό βήμα

1. Καθορισμός της μεταβλητής που θα εισέλθει στη βάση:
   Επιλογή της μη βασικής μεταβλητής x_{ij} με τη μεγαλύτερη αρνητική διαφορά $c_{ij} - u_i - v_j$

2. Καθορισμός της μεταβλητής που θα εξέλθει από τη βάση:
   Αναγνώριση του βρόχου που έχει ως κορυφές βασικές μόνο μεταβλητές.
   Κατανομή στην εισερχόμενη μεταβλητή της μεγαλύτερης δυνατής ποσότητας.
   Για τον προσδιορισμό της επιλέγεται μεταξύ των δρομολογίων-δοτών εκείνο που έχει τη μικρότερη τιμή. Η αντίστοιχη μεταβλητή εξέρχεται από τη βάση.

3. Προσδιορισμός της νέας βασικής δυνατής λύσης:
   Πρόσθεση της ποσότητας θ σε κάθε δρομολόγιο-λήπτη και αφαίρεσή της από κάθε δρομολόγιο-δότη, έτσι ώστε να μη παραβιάζονται οι περιορισμοί πηγών και προορισμών.

Κανόνας τερματισμού

Υπολογισμός των στοιχείων u_i και v_j.

[Συνιστάται η επιλογή της ευθείας με το μεγαλύτερο πλήθος βασικών δρομολογίων, κατανομών, δίνοντας στο αντίστοιχο u_i (v_j) την τιμή μηδέν και λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $c_{ij} = u_I + v_j$ για κάθε βασικό δρομολόγιο (i,j)]

Έλεγχος αριστότητας της λύσης:

Αν για κάθε μη βασικό δρομολόγιο (i,j), ισχύει η σχέση $u_i + v_j \quad <= c_{ij}$ τότε η λύση είναι άριστη ➔ Τέλος.

Σε αντίθετη περίπτωση, μεταφορά στο επαναληπτικό βήμα.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*****. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Διαδοχικά Βήματα Εύρεσης της Άριστης Λύσης

1η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	4	1	2	4	3	
Λ_1	-1	75 3	2	3	4	* 1	75
Λ_2	-0	25-θ 4	60 1	40 2	25+θ 4	* 2	150
Λ_3	-1	θ * 1	0	5	50-θ 3	25 2	75
		100	60	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Η μεγαλύτερη ποσότητα που μπορεί να μετακινηθεί από το δρομολόγιο Λ2 - Κ1 (εξερχόμενη μεταβλητή) στο δρομολόγιο Λ3 - Κ1 (εισερχόμενη μεταβλητή επειδή $c_{31} = u_3 - v_1 = 1-(-1)-4 = -2 < 0$) είναι η $\theta_{max} = 25$.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

2η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	2	1	2	4	3	
$Λ_1$	1	75-θ 3	2	3	* 4	θ * 1	75
$Λ_2$	-0	4	60 1	40 2	50 4	* 2	150
$Λ_3$	-1	25+θ 1	0	5	25 3	25-θ 2	75
		100	60	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Συνολικό κόστος μεταφοράς: 715
Εισερχόμενη μεταβλητή : x_{15} (c_{15}-u_1-v_5 = -1)
Εξερχόμενη μεταβλητή : x_{35}
Μεταφερόμενη ποσότητα : $\theta_{max} = 25$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

3η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	2	1	2	4	3	
$Λ_1$	1	50-θ 3	2	3	θ * 4	25 1	75
$Λ_2$	-0	4	60 1	40 2	50 4	2	150
$Λ_3$	-1	50+θ 1	0	5	25-θ 3	2	75
		100	60	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Συνολικό κόστος μεταφοράς	:	640 (ίσο με εκείνο της μεθόδου Vogel)
Εισερχόμενη μεταβλητή	:	x_{14} (c_{14}-u_1-v_4 = -1)
Εξερχόμενη μεταβλητή	:	x_{34}
Μεταφερόμενη ποσότητα	:	$\theta_{max} = 25$

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

4η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	2	1	2	4	3	
$Λ_1$	1	25 3	2	3	25 4	25 1	75
$Λ_2$	-0	4	60 1	40 2	50 4	2	150
$Λ_3$	-1	75 1	0	5	3	2	75
		100	60	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Η λύση αυτή είναι η άριστη, αφού για κάθε μη βασική μεταβλητή x_{ij} ισχύει η συνθήκη αριστότητας $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς ισούται με € 615. Επομένως το καλύτερο πρόγραμμα μεταφοράς και διανομής των 300 τόνων του παραγόμενου χαλικιού είναι το ακόλουθο:

από το λατομείο $Λ_1$
- → 25 τόνοι στον καταναλωτή K_1
- → 25 - " - K_4
- → 25 - " - K_5

από το λατομείο $Λ_2$
- → 60 τόνοι στον καταναλωτή K_1
- → 40 - " - K_3
- → 50 - " - K_4

από το λατομείο $Λ_3$ → 75 τόνοι στον καταναλωτή K_1

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Εκφυλισμένη Λύση

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
$Λ_1$	100 3	ε 2	3	4	1	100+ε
$Λ_2$	4	60 1	40 2	25 4	2	125
$Λ_3$	θ 1	0	5	50 3	25 2	75
	100	60+ε	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

1η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	2	1	2	4	3	
$Λ_1$	1	100 3	ε-θ 2	3	* 4	θ* 1	100+ε
$Λ_2$	0	4	60-θ 1	40 2	25-θ 4	* 2	125
$Λ_3$	-1	1	0	5	50-θ 3	25-θ 2	75
		100	60+ε	40	75	25	

Με αστερίσκο (*) σημειώνονται όλα τα μη βασικά δρομολόγια, για τα οποία η διαφορά c_{ij}-u_i-v_j είναι αρνητική.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Συνολικό κόστος μεταφοράς	: 740
Εισερχόμενη μεταβλητή	: x_{15} (c_{15}-u_1-v_5 = -3)
Εξερχόμενη μεταβλητή	: x_{12}
Μέγιστη μεταφερόμενη ποσότητα	: θ_{max} = ε

2η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	5	1	2	4	3	
$Λ_1$	1	100-θ / 3	2	3	4	ε+θ / 1	100+ε
$Λ_2$	0	* / 4	60+ε / 1	40 / 2	50-ε / 4	* / 2	125
$Λ_3$	-1	θ* / 1	0	5	50+ε / 3	25-ε-θ / 2	75
		100	60+ε	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Συνολικό κόστος μεταφοράς	:	740
Εισερχόμενη μεταβλητή	:	x_{31} ($c_{31}-u_3-v_1 = -1$)
Εξερχόμενη μεταβλητή	:	x_{35}
Μέγιστη μεταφερόμενη ποσότητα	:	$\theta_{max} = 25-\varepsilon$

3η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	2	1	2	4	3	
$Λ_1$	1	75-θ 3	2	3	θ* 4	25 1	100+ε
$Λ_2$	0	4	60+ε 1	40 2	25-ε 4	2	125
$Λ_3$	-1	25-ε+θ 1	0	5	50+ε-θ 3	2	75
		100	60+ε	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Συνολικό κόστος μεταφοράς	:	665
Εισερχόμενη μεταβλητή	:	x_{14} (c_{14}-u_1-v_4 = -1)
Εξερχόμενη μεταβλητή	:	x_{34}
Μέγιστη μεταφερόμενη ποσότητα	:	$\theta_{max} = 50+\varepsilon$

4η Επανάληψη

		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
	v_j / u_i	3	1	2	4	1	
$Λ_1$	0	25 3	2	3	50+ε 4	25 1	100+ε
$Λ_2$	0	4	60+ε 1	40 2	25-ε 4	2	150
$Λ_3$	-1	75 1	0	5	3	2	75
		100	60+ε	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Για όλα τα μη βασικά δρομολόγια του τελευταίου πίνακα ισχύει η συνθήκη $u_i + vj \leq cij$, επομένως η τρέχουσα λύση είναι άριστη. Προκειμένου να αναγνωρισθεί αυτή η λύση, αρκεί η απαλοιφή της βοηθητικής μεταβλητής ε, η συνεισφορά της οποίας έχει πλέον ολοκληρωθεί. Μπορεί πλέον να προσδιοριστεί το συνολικό κόστος μεταφοράς (€ 615) και το αναλυτικό πρόγραμμα μεταφοράς και διανομής των 300 τόνων του χαλικιού.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Άριστη Λύση

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
Λ_1	25 3	 2	 3	50 4	25 1	100
Λ_2	 4	60 1	40 2	25 3	 2	125
Λ_3	75 1	 0	 5	 3	 2	75
	100	60	40	75	25	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Έλλειψη Ισορροπίας

1. Πλεονάζουσα παραγωγή

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \quad \text{(όπου i = 1,2,...,m)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq b_i \quad \text{(όπου j = 1,2,...,n)}$$

$$\rightarrow \sum_{j=i}^{m} a_i \geq \sum_{j=i}^{n} b_i$$

Δημιουργία φανταστικού προορισμού (θέσης κατανάλωσης)

Οι τιμές των στοιχείων της πρόσθετης στήλης που δημιουργείται εξαρτώνται από την τύπο και τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

2. Ελλειμματική παραγωγή

$$\sum_{j=i}^{m} x_{ij} = a_i \quad \text{(όπου i = 1,2,...,m)}$$

$$\sum_{i=i}^{n} x_{ij} \leq b_i \quad \text{(όπου j = 1,2,...,n)}$$

$$\rightarrow \sum_{j=i}^{m} a_i \leq \sum_{j=i}^{n} b_i$$

Δημιουργία φανταστικής πηγής (θέσης παραγωγής)

Όσον αφορά στα στοιχεία της πρόσθετης γραμμής που δημιουργείται:

- Αν το κόστος έλλειψης της ποσότητας που πρέπει να μεταφερθεί σε έναν προορισμό είναι μηδενικό, το αντίστοιχο στοιχείο κόστους τίθεται ίσο με μηδέν.

- Αν η αδυναμία ικανοποίησης της ζήτησης συνεπάγεται ορισμένες οικονομικές επιπτώσεις (ποινικές ρήτρες, εκπτώσεις, κόστος καλής φήμης κ.λπ.), τότε το κόστος σε κάθε θέση της πρόσθετης γραμμής ισούται με το αντίστοιχο μοναδιαίο κόστος έλλειψης.

3. Υποχρέωση Ικανοποίησης

Σε τέτοιες περιπτώσεις ο πίνακας μεταφοράς πρέπει να διαμορφωθεί με τρόπο ώστε το αντίστοιχο πρόσθετο δρομολόγιο της φανταστικής πηγής ή προορισμού να έχει οπωσδήποτε μηδενική τιμή (δηλαδή δε θα συμμετέχει) στην τελική λύση. Για το σκοπό αυτό δίνεται στο στοιχείο κόστους αυτού του δρομολογίου μία πολύ μεγάλη θετική τιμή (Μ). Έτσι εξασφαλίζεται ότι αυτό το δρομολόγιο δεν πρόκειται να συμμετάσχει σε καμία περίπτωση στην τελική λύση.

4. Πλεονάζουσα ή Ελλειμματική Παραγωγή

Είναι πιθανό σε ορισμένα προβλήματα μεταφοράς να μην είναι γνωστό εκ των προτέρων κατά πόσον η παραγωγή θα είναι πλεονάζουσα ή ελλειμματική. Αυτό μπορεί να συμβεί αν τα στοιχεία c_{ij} παριστάνουν οικονομικά αποτελέσματα (κέρδος, ζημία ή άλλο μέτρο αποτελεσματικότητας) από την ικανοποίηση των θέσεων κατανάλωσης. Κάποια από αυτά τα στοιχεία μπορεί να είναι αρνητικά. Ως εκ τούτου είναι ίσως πιο συμφέρον να μην ικανοποιηθεί καθόλου κάποια ζήτηση παρά το αντίστοιχο οικονομικό αποτέλεσμα να οδηγήσει σε ζημία.

Για την αντιμετώπιση μίας τέτοιας κατάστασης προστίθενται στον αρχικό πίνακα μεταφοράς μία φανταστική πηγή (γραμμή) και ένας φανταστικός προορισμός (στήλη). Η δυναμικότητα και η ζήτηση των δύο πρόσθετων ευθειών πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να μην είναι υποχρεωτική ούτε η ικανοποίηση όλων των αναγκών κατανάλωσης ούτε η χρησιμοποίηση όλων των δυναμικοτήτων.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Επίλυση Προβλημάτων Μεγιστοποίησης

Στην περίπτωση αυτή στόχος είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μεθοδολογία εύρεσης της άριστης λύσης ενός τέτοιου προβλήματος είναι πολύ παρόμοια με αυτή των προβλημάτων ελαχιστοποίησης. Τα απαιτούμενα βήματα μετά τον προσδιορισμό μιας αρχικής βασικής λύσης μένουν αμετάβλητα. Η μόνη διαφορά αφορά στον κανόνα τερματισμού κατά τον έλεγχο αριστότητας της λύσης:

Η τρέχουσα λύση είναι άριστη αν για κάθε μη βασικό δρομολόγιο ισχύει η σχέση:

$\mathbf{u_i + v_j \geq c_{ij}}$

Διαφοροποιήσεις στην Εφαρμογή των Μεθόδων Εύρεσης Αρχικής Λύσης

- Μέθοδος βορειοδυτικής γωνίας:
  Καμία διαφορά.

- Μέθοδος ελάχιστου κόστους:
  Ουσιαστικά μετονομάζεται σε 'μέθοδο μέγιστου κέρδους', οπότε διατηρώντας την ίδια λογική, κατανέμεται κατά προτεραιότητα η μέγιστη δυνατή ποσότητα στο δρομολόγιο με το μέγιστο μοναδιαίο κέρδος.

- Μέθοδος Vogel:
  Οι διαφορές λόγω της συνθετότητάς της είναι περισσότερες:
  - Βήμα 1: Η πρόσθετη στήλη και γραμμή έχουν στοιχεία τις διαφορές των δύο μεγαλύτερων στοιχείων κέρδους κάθε γραμμής και κάθε στήλης αντίστοιχα.
  - Βήμα 3: Μέσα στον πίνακα μεταφοράς αναζητείται το μεγαλύτερο στοιχείο της κατάλληλης στήλης ή γραμμής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΦΟΡΤΩΣΗΣ

Μία από τις κύριες απαιτήσεις του προβλήματος μεταφοράς είναι η εξ αρχής γνώση του τρόπου με τον οποίο θα μεταφερθούν οι μονάδες από κάθε πηγή i σε κάθε προορισμό j και μπορεί να προσδιοριστεί το αντίστοιχο μοναδιαίο κόστος c_{ij}.

Ωστόσο, μερικές φορές ο καλύτερος τρόπος μεταφοράς δεν είναι ξεκάθαρος λόγω της πιθανότητας μεταφορτώσεων, κατά τις οποίες τα φορτία αποστέλλονται μέσω ενδιάμεσων σημείων μεταβίβασης (που μπορεί να είναι άλλες πηγές ή προορισμοί). Τέτοιες περιπτώσεις μπορούν να διερευνηθούν από την αρχή προκειμένου να προσδιοριστεί η φθηνότερη διαδρομή από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό. Αν υπάρχουν πολλά πιθανά ενδιάμεσα σημεία μεταβίβασης, ο προσδιορισμός του φθηνότερου τρόπου μπορεί να γίνει εξαιρετικά σύνθετος και χρονοβόρος.

Για το λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί ένας υπολογιστικός αλγόριθμος που προσδιορίζει τις ποσότητες που θα μεταφερθούν από κάθε πηγή σε κάθε προορισμό καθώς και τη διαδρομή που θα ακολουθήσει κάθε φορτίο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος αποστολής.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Η επέκταση του προβλήματος μεταφοράς που περιλαμβάνει τις αποφάσεις των ενδιάμεσων δρομολογήσεων μεταξύ πηγών και προορισμών ονομάζεται ***πρόβλημα μεταφόρτωσης (transshipment problem)*****.**

Έχει βρεθεί ένας απλός τρόπος αναδιατύπωσης του προβλήματος μεταφόρτωσης ώστε να προσαρμοστεί στη μορφή του προτύπου του προβλήματος μεταφοράς. Έτσι η μέθοδος Simplex που αναλύθηκε στις προηγούμενες ενότητες των Π.Μ. μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των προβλημάτων μεταφόρτωσης.

Πρότυπο παράδειγμα

Η κονσερβοβιομηχανία “Canned legumes” (βλ. άσκηση 25 βιβλίου) διαπίστωσε ότι μπορεί να ελαττώσει το κόστος μεταφοράς των προϊόντων της διακόπτοντας τη χρήση των δικών της φορτηγών και χρησιμοποιώντας μεταφορικές εταιρείες για τη μεταφορά των φορτίων της.

Αρχικός πίνακας μεταφοράς κονσερβοβιομηχανίας

		Κέντρα διανομής				
		1	2	3	4	
Κονσερβοποιείο	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
		80	65	70	85	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Επειδή δεν υπάρχει καμία μεταφορική εταιρεία που να εξυπηρετεί ολόκληρη την περιοχή που περιλαμβάνει τα κονσερβοποιεία και τα κέντρα διανομής της εταιρείας, πολλά φορτία χρειάζεται να μεταβιβαστούν κατά τη διαδρομή τους τουλάχιστον μία φορά σε άλλο φορτηγό. Αυτές οι μεταβιβάσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν σε ενδιάμεσα κονσερβοποιεία ή κέντρα διανομής ή σε πέντε άλλες τοποθεσίες που ονομάζονται ***διασταυρώσεις***. Το κόστος μεταφοράς ανά φορτίο μεταξύ καθενός από αυτές τις διασταυρώσεις παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Δεδομένα ανεξάρτητων μεταφορτώσεων κονσερβοβιομηχανίας

Από \ Προς		Κονσερβοποιείο			Διασταύρωση					Κέντρο διανομής				Παραγωγή
		1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	
Κονσερβοποιείο	1		146	…*	324	286	…	…	…	452	505	…	871	75
	2	146		…	373	212	570	609	…	335	407	688	784	125
	3				324	…	405	419	158	…	685	359	673	100
Διασταύρωση	1	322	371	656		262	398	430	…	503	234	329	…	
	2	284	210	…	262		406	421	644	305	207	464	558	
	3	…	569	403	398	406		81	272	597	253	171	282	
	4	…	608	418	431	472	81		287	613	280	236	229	
	5	…	…	158	…	647	274	288		831	501	291	482	
Κέντρο διανομής	1	453	336	…	505	307	599	615	831		359	706	587	
	2	505	407	683	235	208	254	281	500	357		362	341	
	3	…	687	357	329	464	171	236	290	705	362		457	
	4	868	781	670	…	282	282	229	480	587	340	457		
Κατανομή										80	65	70	85	

* το σύμβολο …δηλώνει ότι η απευθείας μεταφορά δεν είναι εφικτή

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Η καλύτερη ιδέα για την επίλυση του προβλήματος μεταφόρτωσης είναι η αναδιατύπωσή του ως πρόβλημα μεταφοράς, προκειμένου κατόπιν να επιλυθεί με τη γνωστή μέθοδο. Η βασική ιδέα για το σκοπό αυτό είναι η ερμηνεία της κάθε μετακίνησης των φορτηγών ως μεταφορά από μία πηγή σε έναν προορισμό. Κατά συνέπεια πρέπει να θεωρηθούν όλες οι τοποθεσίες (κονσερβοποιεία, διασταυρώσεις και κέντρα διανομής) τόσο ως πιθανές πηγές, όσο και ως πιθανοί προορισμοί όλων των μεταφορών.

Έτσι θεωρείται ότι υπάρχουν 12 πηγές (3 κονσερβοποιεία + 5 διασταυρώσεις + 4 κέντρα διανομής) και 12 προορισμοί. Οι αντίστοιχες δαπάνες μεταφοράς c_{ij} (όπου $i = 1, 2, \ldots 12$ και $j = 1, 2, \ldots 12$) δίνονται στον ακόλουθο πίνακα, με χρήση του υψηλού κόστους M ($M >> 0$) για τις μη εφικτές μεταφορές που είχαν συμβολιστεί με … στον προηγούμενο πίνακα.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Ο αριθμός των φορτίων που μεταφορτώνεται μέσω κάθε τοποθεσίας πρέπει να συμπεριληφθεί τόσο στις ανάγκες της ως προορισμού, όσο και στην προσφορά της ως πηγής. Εφόσον αυτός ο αριθμός δεν είναι γνωστός από την αρχή, πρέπει απλά να προστεθεί ένα ανώτερο όριο στη ζήτηση και στην προσφορά της τοποθεσίας και να εισαχθεί κατόπιν μία ψευδομεταβλητή στους περιορισμούς της ζήτησης και της προσφοράς προκειμένου να κατανεμηθεί σε αυτήν η περίσσεια. Μια και δε συμφέρει ποτέ να μεταφορτωθεί ένα φορτίο στην ίδια τοποθεσία περισσότερο από μία φορά, ένα ασφαλές ανώτερο όριο για οποιαδήποτε θέση είναι ο συνολικός αριθμός των 300 φορτίων.

Μπορεί πλέον να καταρτιστεί ο πλήρης πίνακας κόστους ως μοντέλο προβλήματος μεταφοράς του προβλήματος μεταφόρτωσης.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). ***Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα**

Πίνακας κόστους του προβλήματος μεταφόρτωσης μετασχηματισμένου ως πρόβλημα μεταφοράς

Πηγή \ Προορισμός		Κονσερβοποιεία 1	Κονσερβοποιεία 2	Κονσερβοποιεία 3	Διασταυρώσεις 1	Διασταυρώσεις 2	Διασταυρώσεις 3	Διασταυρώσεις 4	Διασταυρώσεις 5	Κέντρα διανομής 1	Κέντρα διανομής 2	Κέντρα διανομής 3	Κέντρα διανομής 4	Προσφορά
Κονσερβοποιεία	1	0	146	M	324	286	M	M	M	452	505	M	871	375
	2	146	0	M	373	212	570	609	M	335	407	688	784	425
	3	M	M	0	658	M	405	419	158	M	685	359	673	400
Διασταυρώσεις	1	322	371	656	0	262	398	430	M	503	234	329	M	300
	2	284	210	M	262	0	406	421	644	305	207	464	558	300
	3	M	569	403	398	406	0	81	272	597	253	171	282	300
	4	M	608	418	431	472	81	0	287	613	280	236	229	300
	5	M	M	158	M	647	274	288	0	831	501	291	482	300
Κέντρα διανομής	1	453	336	M	505	307	599	615	831	0	359	706	587	300
	2	505	407	683	235	208	254	281	500	357	0	362	341	300
	3	M	687	357	329	464	171	236	290	705	362	0	457	300
	4	868	781	670	M	282	282	229	480	587	340	457	0	300
Ζήτηση		300	300	300	300	300	300	300	300	80	65	70	85	

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα

Η άριστη λύση του προβλήματος της βιομηχανίας “Canned legumes” μπορεί πλέον να προσδιοριστεί με τη χρήση της μεθόδου Simplex των προβλημάτων μεταφοράς. Λόγω του σχετικά μεγάλου μεγέθους του προβλήματος (m=n=12) είναι απαραίτητη η χρήση σχετικού λογισμικού.